アイレンベルグムーア圏とクライスリ圏

ゐぶ

概要

任意の随伴からモナドを得ることができる. では, 任意のモナドから随伴を得ることができるだろうか？この問の答えは肯定的であり, アイレンベルグムーア圏を用いたものとクライスり圏を用いたものの 2 つの方法がある. 本稿では, 随伴からモナドを得る方法とモナドから随伴を得る 2 つの方法をまとめ, 最後にアイレンベルグムーア圏とクライスリ圏を用いた随伴と代数の比較定理を証明する.

1 モナド

Definition 1.1 (モナド)

$\mathscr{A}$ を圏, $T\colon \mathscr{A} \to \mathscr{A}$ を関手, $\eta\colon \mathrm{id}_{\mathscr{A}} \to T,\ \mu\colon TT \to T$ を自然変換とする. $\mathscr{A}$ 上のモナドとは, 組 (T, η, μ) であり, 以下の図式を可換にするものである.

$$
\begin{tikzcd}
T \arrow[r, "\eta T"] \arrow[dr, "\mathrm{id}_T"'] & TT \arrow[d, "\mu"] & T \arrow[l, "T\eta"'] \arrow[dl, "\mathrm{id}_T"] \\
& T &
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
TTT \arrow[r, "\mu T"] \arrow[d, "T\mu"'] & TT \arrow[d, "\mu"] \\
TT \arrow[r, "\mu"'] & T
\end{tikzcd}
$$

Proposition 1.2

任意の随伴

$$
\begin{tikzcd}
\mathscr{A} \arrow[r, shift left=1.5, "F"] \arrow[r, phantom, "\perp"] & \mathscr{B} \arrow[l, shift left=1.5, "U"]
\end{tikzcd}
\qquad \eta\colon \mathrm{id}_{\mathscr{A}} \to UF,\ \varepsilon\colon FU \to \mathrm{id}_{\mathscr{B}}
$$

から $\mathscr{A}$ 上のモナドを得る.

proof

組 $(UF\colon \mathscr{A} \to \mathscr{A},\ \eta\colon \mathrm{id}_{\mathscr{A}} \to UF,\ U\varepsilon F\colon UFUF \to UF)$ を考える. 随伴の三角等式より, 図式

$$
\begin{tikzcd}
U \arrow[r, "\eta U"] \arrow[dr, "\mathrm{id}_U"'] & UFU \arrow[d, "U\varepsilon"] \\
& U
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
FUF \arrow[d, "\varepsilon F"'] & F \arrow[l, "F\eta"'] \arrow[dl, "\mathrm{id}_F"] \\
F &
\end{tikzcd}
$$

は可換であるため, 図式

$$\begin{tikzcd} UF \arrow[r, "\eta UF"] \arrow[dr, "\mathrm{id}_{UF}"'] & UFUF \arrow[d, "U\varepsilon F"] & UF \arrow[l, "UF\eta"'] \arrow[dl, "\mathrm{id}_{UF}"] \\ & UF & \end{tikzcd}$$

は可換であり, 自然変換 $U\varepsilon\colon UFU \to U$ の自然性より, $\varepsilon F_B \in \mathrm{Hom}_{\mathscr{A}}(FUF(B), F(B))$ に対し, 図式

$$\begin{tikzcd} UFU(FUF(B)) \arrow[r, "UFU(\varepsilon F_B)"] \arrow[d, "U\varepsilon_{FUF(B)}"'] & UFU(F(B)) \arrow[d, "U\varepsilon_{F(B)}"] \\ U(FUF(B)) \arrow[r, "U(\varepsilon F_B)"'] & U(F(B)) \end{tikzcd}$$

は可換であるため, 図式

$$\begin{tikzcd} UFUFUF \arrow[r, "UFU\varepsilon F"] \arrow[d, "U\varepsilon FUF"'] & UFUF \arrow[d, "U\varepsilon F"] \\ UFUF \arrow[r, "U\varepsilon F"'] & UF \end{tikzcd}$$

は可換である.

　したがって, $(UF,\ \eta,\ U\varepsilon F)$ は $\mathscr{A}$ 上のモナドである. □

2　アイレンベルグムーア圏

Definition 2.1 (アイレンベルグムーア圏)

$\mathbf{T} = (T, \eta, \mu)$ を圏 $\mathscr{A}$ 上のモナド, $A \in ob(\mathscr{A}),\ a \in \mathrm{Hom}_{\mathscr{A}}(T(A), A)$ とする.
対象を組 (A, a) であり, 図式

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "\eta_A"] \arrow[dr, "\mathrm{id}_A"'] & T(A) \arrow[d, "a"] \\ & A \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} TT(A) \arrow[r, "\mu_A"] \arrow[d, "T(a)"'] & T(A) \arrow[d, "a"] \\ T(A) \arrow[r, "a"'] & A \end{tikzcd}$$

が可換となるものとし, 射 $f\colon (A, a) \to (B, b)$ は $f \in \mathrm{Hom}_{\mathscr{A}}(A, B)$ で図式

$$\begin{tikzcd} T(A) \arrow[r, "T(f)"] \arrow[d, "a"'] & T(B) \arrow[d, "b"] \\ A \arrow[r, "f"'] & B \end{tikzcd}$$

が可換となるものとする圏をアイレンベルグムーア圏といい, $\mathscr{A}^{\mathbf{T}}$ と表す.

$\mathscr{A}^{\mathbf{T}}$ の対象を $\mathbf{T}$ 代数という.

$(A,a) \in ob(\mathscr{A}^{\mathbf{T}})$ に対し, $A \in ob(\mathscr{A})$ を対応させ, $f \in \mathrm{Hom}_{\mathscr{A}^{\mathbf{T}}}((A,a),(B,b))$ に対し, $f \in \mathrm{Hom}_{\mathscr{A}}(A,B)$ を対応させることで関手 $U^{\mathbf{T}}\colon \mathscr{A}^{\mathbf{T}} \to \mathscr{A}$ が定まる.

$\mathbf{T} = (T,\eta,\mu)$ を圏 $\mathscr{A}$ 上のモナドとし, $A \in ob(\mathscr{A})$ とする. このとき, $(T(A),\ \mu_A\colon TT(A) \to T(A))$ を考える. モナドの定義と自然変換 $\mu\colon TT \to T$ の自然性より, 図式

$$\begin{tikzcd} T(A) \arrow[r, "\eta_{T(A)}"] \arrow[dr, "\mathrm{id}_{T(A)}"'] & TT(A) \arrow[d, "\mu_A"] \\ & T(A) \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} TTT(A) \arrow[r, "\mu_{T(A)}"] \arrow[d, "TT(\mu_A)"'] & TT(A) \arrow[d, "\mu_A"] \\ TT(A) \arrow[r, "\mu_A"'] & T(A) \end{tikzcd}$$

は可換であるため, $(T(A),\mu_A)$ は $\mathbf{T}$ 代数である.

また, $f \in \mathrm{Hom}_{\mathscr{A}}(A,B)$ に対し, $T(f)\colon (T(A),\mu_A) \to (T(B),\mu_B)$ を考える. 自然変換 $\mu\colon TT \to T$ の自然性より, 図式

$$\begin{tikzcd} TT(A) \arrow[r, "T(f)"] \arrow[d, "\mu_A"'] & TT(B) \arrow[d, "\mu_B"] \\ T(A) \arrow[r, "f"'] & T(B) \end{tikzcd}$$

は可換である.

したがって, $A \in ob(\mathscr{A})$ に対し, $(T(A),\ \mu_A) \in ob(\mathscr{A}^{\mathbf{T}})$ を対応させ, $f \in \mathrm{Hom}_{\mathscr{A}}(A,B)$ に対し, $T(f) \in \mathrm{Hom}_{\mathscr{A}^{\mathbf{T}}}((T(A),\mu_A),(T(B),\mu_B))$ を対応させることで関手 $F^{\mathbf{T}}\colon \mathscr{A} \to \mathscr{A}^{\mathbf{T}}$ が定まる.

Proposition 2.2

$\mathbf{T} = (T,\eta,\mu)$ を圏 $\mathscr{A}$ 上のモナドとする. このとき, $F^{\mathbf{T}} \dashv U^{\mathbf{T}}$ が成立する.

$$\begin{tikzcd} \mathscr{A} \arrow[r, shift left, "F^{\mathbf{T}}"] \arrow[r, phantom, "\perp"] & \mathscr{A}^{\mathbf{T}} \arrow[l, shift left, "U^{\mathbf{T}}"] \end{tikzcd}$$

Proof

$A \in ob(\mathscr{A})$, $f \in \mathrm{Hom}_{\mathscr{A}}(A,B)$ とすると, $F^{\mathbf{T}}$ と $U^{\mathbf{T}}$ の定義より,

$$\begin{aligned} U^{\mathbf{T}}F^{\mathbf{T}}(A) &= U^{\mathbf{T}}((T(A),\mu_A)) = T(A), \\ U^{\mathbf{T}}F^{\mathbf{T}}(f) &= U^{\mathbf{T}}(T(f)) = T(f) \end{aligned}$$

が成立する. よって単位を $\eta\colon \mathrm{id}_{\mathscr{A}} \to F^{\mathbf{T}}U^{\mathbf{T}}$ で定める.

$(A,a) \in ob(\mathscr{A}^{\mathbf{T}})$ とすると, $F^{\mathbf{T}}$ と $U^{\mathbf{T}}$ の定義より,

$$F^{\mathbf{T}}U^{\mathbf{T}}((A,a)) = F^{\mathbf{T}}(A) = (T(A),\mu_A)$$

が成立する.
また, $\mathbf{T}$ 代数の定義より, $a \in \mathrm{Hom}_{\mathscr{A}}(T(A), A)$ は図式

$$\begin{tikzcd} TT(A) \arrow[r, "T(a)"] \arrow[d, "\mu_A"'] & T(A) \arrow[d, "a"] \\ T(A) \arrow[r, "a"'] & A \end{tikzcd}$$

を可換にする. よって, $a\colon (T(A), \mu_A) \to (A, a)$ は $\mathscr{A}^{\mathbf{T}}$ の射とみなせる.
したがって, 余単位 $\varepsilon\colon F^{\mathbf{T}}U^{\mathbf{T}} \to \mathrm{id}_{\mathscr{A}^{\mathbf{T}}}$ を $\varepsilon_{(A,a)} :=\ F^{\mathbf{T}}U^{\mathbf{T}}(A, a) \xrightarrow{a} (A, a)$ で定める.
　モナドの定義より, 図式

$$\begin{tikzcd} U^{\mathbf{T}}F^{\mathbf{T}}(A) \arrow[r, "U^{\mathbf{T}}F^{\mathbf{T}}\eta_A"] \arrow[dr, "\mathrm{id}_{U^{\mathbf{T}}F^{\mathbf{T}}(A)}"'] & U^{\mathbf{T}}F^{\mathbf{T}}U^{\mathbf{T}}F^{\mathbf{T}}(A) \arrow[d, "\mu_A = U^{\mathbf{T}}\varepsilon F^{\mathbf{T}}_A"] \\ & U^{\mathbf{T}}F^{\mathbf{T}}(A) \end{tikzcd}$$

は可換であるため, 三角等式

$$\begin{tikzcd} F^{\mathbf{T}} \arrow[r, "F^{\mathbf{T}}\eta"] \arrow[dr, "\mathrm{id}_{F^{\mathbf{T}}}"'] & F^{\mathbf{T}}U^{\mathbf{T}}F^{\mathbf{T}} \arrow[d, "\varepsilon F^{\mathbf{T}}"] \\ & F^{\mathbf{T}} \end{tikzcd}$$

は可換である. また $\mathbf{T}$ 代数の定義より, 図式

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "\eta_A"] \arrow[dr, "\mathrm{id}_A"'] & U^{\mathbf{T}}F^{\mathbf{T}}(A) \arrow[d, "a"] \\ & A \end{tikzcd}$$

は可換であるため, 三角等式

$$\begin{tikzcd} U^{\mathbf{T}} \arrow[r, "\eta U^{\mathbf{T}}"] \arrow[dr, "\mathrm{id}_{U^{\mathbf{T}}}"'] & U^{\mathbf{T}}F^{\mathbf{T}}U^{\mathbf{T}} \arrow[d, "U^{\mathbf{T}}\varepsilon"] \\ & U^{\mathbf{T}} \end{tikzcd}$$

は可換である. したがって, $F^{\mathbf{T}} \dashv U^{\mathbf{T}}$ である. □

$$\begin{tikzcd} \mathscr{A} \arrow[r, shift left=2, "F^{\mathbf{T}}"] \arrow[r, phantom, "\perp"] & \mathscr{A}^{\mathbf{T}} \arrow[l, shift left=2, "U^{\mathbf{T}}"] \end{tikzcd}$$

は **Proposition 2.2** の方法でモナド (T, η, μ) を与える.

3　クライスリ圏

Definition 3.1 (クライスリ圏)

$\mathbf{T} = (T, \eta, \mu)$ を圏 $\mathscr{A}$ 上のモナドとする.
対象を $\mathscr{A}$ の対象とし, 射 $f\colon A \to B$ を $\mathscr{A}$ の射 $A \to T(B)$ とする圏をクライスリ圏といい, $\mathscr{A}_{\mathbf{T}}$ と表す.

クライスリ圏 $\mathscr{A}_{\mathbf{T}}$ の恒等射は $\eta_A\colon A \to T(A)$ であり, $f \in \mathrm{Hom}_{\mathscr{A}_{\mathbf{T}}}(A, B)$ と $g \in \mathrm{Hom}_{\mathscr{A}_{\mathbf{T}}}(B, C)$ の合成射 $g \circ f \in \mathrm{Hom}_{\mathscr{A}_{\mathbf{T}}}(A, C)$ は $\mu_C \circ T(g) \circ f\colon A \to T(C)$, つまり

$$A \xrightarrow{\quad f \quad} T(B) \xrightarrow{\quad T(g) \quad} TT(C) \xrightarrow{\quad \mu_C \quad} T(C)$$

である.

$A \in ob(\mathscr{A})$ に対し, $A \in ob(\mathscr{A}_{\mathbf{T}})$ を対応させ, $f \in \mathrm{Hom}_{\mathscr{A}}(A, B)$ に対し, $\eta_B \circ f \in \mathrm{Hom}_{\mathscr{A}}(A, T(B)) = \mathrm{Hom}_{\mathscr{A}_{\mathbf{T}}}(A, B)$, つまり

$$A \xrightarrow{\quad f \quad} B \xrightarrow{\quad \eta_B \quad} T(B)$$

を対応させることで関手 $F_{\mathbf{T}}\colon \mathscr{A} \to \mathscr{A}_{\mathbf{T}}$ が定まる.

$A \in ob(\mathscr{A}_{\mathbf{T}})$ に対し, $T(A) \in ob(\mathscr{A})$ を対応させ, $f \in \mathrm{Hom}_{\mathscr{A}_{\mathbf{T}}}(A, B) = \mathrm{Hom}_{\mathscr{A}}(A, T(B))$ に対し, $\mu_B \circ T(f) \in \mathrm{Hom}_{\mathscr{A}}(T(A), T(B))$

$$T(A) \xrightarrow{\quad T(f) \quad} TT(B) \xrightarrow{\quad \mu_B \quad} T(B)$$

を対応させることで関手 $U_{\mathbf{T}}\colon \mathscr{A}_{\mathbf{T}} \to \mathscr{A}$ が定まる.

Proposition 3.2

$\mathbf{T} = (T, \eta, \mu)$ を圏 $\mathscr{A}$ 上のモナドとする. このとき, $F_{\mathbf{T}} \dashv U_{\mathbf{T}}$ が成立する.

$$\begin{tikzcd} \mathscr{A} \arrow[r, shift left=1.5ex, "F_{\mathbf{T}}"] \arrow[r, phantom, "\perp"] & \mathscr{A}_{\mathbf{T}} \arrow[l, shift left=1.5ex, "U_{\mathbf{T}}"] \end{tikzcd}$$

Proof

$\mathscr{A}_{\mathbf{T}}$ の射の定義より, $A \in ob(\mathscr{A})$, $B \in ob(\mathscr{A}_{\mathbf{T}})$ に対し, 自然同型

$$\mathrm{Hom}_{\mathscr{A}_{\mathbf{T}}}(F_{\mathbf{T}}(A), B) \cong \mathrm{Hom}_{\mathscr{A}}(A, T(B)) \cong \mathrm{Hom}_{\mathscr{A}}(A, U_{\mathbf{T}}(B))$$

が成立するため, $F_{\mathbf{T}} \dashv U_{\mathbf{T}}$ が成立する. □

$$\begin{tikzcd} \mathscr{A} \arrow[r, shift left=1.5ex, "F_{\mathbf{T}}"] \arrow[r, phantom, "\perp"] & \mathscr{A}_{\mathbf{T}} \arrow[l, shift left=1.5ex, "U_{\mathbf{T}}"] \end{tikzcd}$$

は **Proposition 2.2** の方法でモナド (T, η, μ) を与える.

4 随伴と代数の比較定理

圏 $\mathscr{A}$ 上のモナド (T, η, μ) に対し, 対象を **Proposition 2.2** の方法で (T, η, μ) が得られる随伴

$$\begin{tikzcd} \mathscr{A} \arrow[r, shift left=2, "F"] \arrow[r, phantom, "\perp"] & \mathscr{B} \arrow[l, shift left=2, "U"] \end{tikzcd} \qquad \eta\colon \mathrm{id}_{\mathscr{A}} \to UF,\ \varepsilon\colon FU \to \mathrm{id}_{\mathscr{B}}$$

とし, 射

$$K : \left(\begin{tikzcd} \mathscr{A} \arrow[r, shift left=2, "F"] \arrow[r, phantom, "\perp"] & \mathscr{B} \arrow[l, shift left=2, "U"] \end{tikzcd}\right) \longrightarrow \left(\begin{tikzcd} \mathscr{A} \arrow[r, shift left=2, "F'"] \arrow[r, phantom, "\perp"] & \mathscr{B}' \arrow[l, shift left=2, "U'"] \end{tikzcd}\right)$$

を $K \circ F = F',\ U' \circ K = U$ を満たす関手 $\mathscr{B} \to \mathscr{B}'$ とする圏を $\mathbf{Adj_T}$ と表す.

$$\begin{tikzcd} \mathscr{B} \arrow[rr, "K"] \arrow[dr, shift left=2, "U"] \arrow[dr, phantom, "\top"] & & \mathscr{B}' \arrow[dl, shift left=2, "U'"] \arrow[dl, phantom, "\perp"] \\ & \mathscr{A} \arrow[ul, shift left=2, "F"] \arrow[ur, shift left=2, "F'"] & \end{tikzcd}$$

Theorem 4.1

$\mathbf{T} = (T, \eta, \mu)$ を圏 $\mathscr{A}$ 上のモナドとする. このとき, $\mathbf{Adj_T}$ の始対象はクライスリ圏 $\mathscr{A}_{\mathbf{T}}$ であり, 終対象はアイレンベルグムーア圏 $\mathscr{A}^{\mathbf{T}}$ である.

$$\begin{tikzcd} \mathscr{A}_{\mathbf{T}} \arrow[r, dotted] \arrow[dr, shift left=2, "U_{\mathbf{T}}"] \arrow[dr, phantom, "\top"] & \mathscr{B} \arrow[r, dotted] \arrow[d, shift left=2, "U"] \arrow[d, phantom, "\dashv"] & \mathscr{A}^{\mathbf{T}} \arrow[dl, shift left=2, "U^{\mathbf{T}}"] \arrow[dl, phantom, "\perp"] \\ & \mathscr{A} \arrow[ul, shift left=2, "F_{\mathbf{T}}"] \arrow[u, shift left=2, "F"] \arrow[ur, shift left=2, "F^{\mathbf{T}}"] & \end{tikzcd}$$

Proof

$\mathbf{Adj_T}$ の対象

$$\begin{tikzcd} \mathscr{A} \arrow[r, shift left=2, "F"] \arrow[r, phantom, "\perp"] & \mathscr{B} \arrow[l, shift left=2, "U"] \end{tikzcd} \qquad \eta\colon \mathrm{id}_{\mathscr{A}} \to UF,\ \varepsilon\colon FU \to \mathrm{id}_{\mathscr{B}}$$

を任意にとる.

$A \in ob(\mathscr{A}_{\mathbf{T}})$ に対し, $F(A) \in ob(\mathscr{B})$ を対応させ, $f \in \mathrm{Hom}_{\mathscr{A}_{\mathbf{T}}}(A, A') = \mathrm{Hom}_{\mathscr{A}}(A, T(A'))$ に対し, $\varepsilon F_{A'} \circ F(f) \in \mathrm{Hom}_{\mathscr{B}}(F(A), F(A'))$

$$F(A) \xrightarrow{F(f)} FUF(A') \xrightarrow{\varepsilon F_{A'}} F(A')$$

を対応させることで関手 $J\colon \mathscr{A}_{\mathbf{T}} \to \mathscr{B}$ が定まる.

$A \in ob(\mathscr{A}),\ f \in \mathrm{Hom}_{\mathscr{A}}(A, A')$ に対し, J と $F_{\mathbf{T}}$ の定義より,

$$J \circ F_{\mathbf{T}}(A) = J(A) = F(A),$$
$$J \circ F_{\mathbf{T}}(f) = J(\eta_{A'} \circ f) = \varepsilon F_{A'} \circ F(\eta_{A'} \circ f) = \varepsilon F_{A'} \circ F\eta_{A'} \circ F(f) = F(f)$$

が成立するため, $J \circ F_{\mathbf{T}} = F$ である.

また, $A \in ob(\mathscr{A}_{\mathbf{T}}),\ f \in \mathrm{Hom}_{\mathscr{A}_{\mathbf{T}}}(A, A')$ に対し, U と J の定義より,

$$U \circ J(A) = U(F(A)) = T(A) = U_{\mathbf{T}}(A),$$
$$U \circ J(f) = U(\varepsilon F_{A'} \circ F(f)) = U\varepsilon F_{A'} \circ UF(f) = \mu_{A'} \circ T(f) = U_{\mathbf{T}}(f)$$

が成立するため, $U \circ J = U_{\mathbf{T}}$ である.

$J \circ F_{\mathbf{T}} = F,\ U \circ J = U_{\mathbf{T}}$ となることと, $F \dashv U,\ F_{\mathbf{T}} \dashv U_{\mathbf{T}}$ の単位と余単位が等しいことより, J は一意である.

$B \in ob(\mathscr{B})$ に対し, $(U(B), U\varepsilon_B \colon UFU(B) \to U(B))$ を考える.
$F \dashv U$ より, 図式

$$\begin{tikzcd} U(B) \arrow[r, "\eta_{U(B)}"] \arrow[dr, "\mathrm{id}_{U(B)}"'] & UFU(B) \arrow[d, "U\varepsilon_B"] \\ & U(B) \end{tikzcd}$$

は可換であり, 自然変換 $U\varepsilon \colon UFU \to U$ の自然性より, 図式

$$\begin{tikzcd} UFU(FU(B)) \arrow[r, "\mu_{U(B)} = U\varepsilon_{FU(B)}"] \arrow[d, "UF(U\varepsilon_B)"'] & U(FU(B)) \arrow[d, "U(\varepsilon_B)"] \\ UFU(B) \arrow[r, "U\varepsilon_B"'] & U(B) \end{tikzcd}$$

は可換である. よって, $(U(B), U\varepsilon_B \colon UFU(B) \to U(B))$ は $\mathbf{T}$ 代数である.

また, $f \in \mathrm{Hom}_{\mathscr{B}}(B, B')$ に対し, 自然変換 $U\varepsilon \colon UFU \to U$ の自然性より, 図式

$$\begin{tikzcd} UFU(B) \arrow[r, "UFU(f)"] \arrow[d, "U\varepsilon_B"'] & UFU(B') \arrow[d, "U\varepsilon_{B'}"] \\ U(B) \arrow[r, "U(f)"'] & U(B') \end{tikzcd}$$

は可換であるため, $U(f)$ は $\mathscr{A}^{\mathbf{T}}$ の射である.

したがって, $B \in ob(\mathscr{B})$ に対し, $(U(B), U\varepsilon_B) \in ob(\mathscr{A}^{\mathbf{T}})$ を対応させ, $f \in \mathrm{Hom}_{\mathscr{B}}(B, B')$ に対し, $U(f) \in \mathrm{Hom}_{\mathscr{A}^{\mathbf{T}}}((U(B), U\varepsilon_B), (U(B'), U\varepsilon_{B'}))$ を対応させることで関手 $K \colon \mathscr{B} \to \mathscr{A}^{\mathbf{T}}$ が定まる.

$A \in ob(\mathscr{A}),\ f \in \mathrm{Hom}_{\mathscr{A}}(A, A')$ に対し, K と F の定義より,

$$K \circ F(A) = K(F(A)) = (UF(A), U\varepsilon_{F(A)}) = (T(A), \mu_A) = F^{\mathbf{T}}(A),$$
$$K \circ F(f) = K(F(f)) = UF(f) = T(f) = F^{\mathbf{T}}(f)$$

が成立するため, $K \circ F = F^{\mathbf{T}}$ である.

また, $B \in ob(\mathscr{B})$, $f \in \mathrm{Hom}_{\mathscr{B}}(B, B')$ に対し, $U^{\mathbf{T}}$と K の定義より,

$$U^{\mathbf{T}} \circ K(B) = U^{\mathbf{T}}((U(B), U\varepsilon_B)) = U(B),$$
$$U^{\mathbf{T}} \circ K(f) = U^{\mathbf{T}}(U(f)) = U(f)$$

が成立するため, $U^{\mathbf{T}} \circ K = U$ である.

$K \circ F = F^{\mathbf{T}}$, $U^{\mathbf{T}} \circ K = U$ となることと $F \dashv U$, $F^{\mathbf{T}} \dashv U^{\mathbf{T}}$ の単位と余単位が等しいことより, K は一意である.

したがって, $\mathbf{Adj_T}$ の始対象はクライスリ圏 $\mathscr{A}_{\mathbf{T}}$ であり, 終対象はアイレンベルグムーア圏 $\mathscr{A}^{\mathbf{T}}$ である. □

Theorem 4.2

関手 $K \circ J\colon \mathscr{A}_{\mathbf{T}} \to \mathscr{A}^{\mathbf{T}}$ は忠実充満である.

Proof

任意の $f, g \in \mathrm{Hom}_{\mathscr{A}_{\mathbf{T}}}(A, A')$ に対し, $K \circ J(f) = K \circ J(g)$ つまり,

$$K(\varepsilon F_{A'} \circ F(f)) = K(\varepsilon F_{A'} \circ F(g))$$
$$U\varepsilon F_{A'} \circ UF(f) = U\varepsilon F_{A'} \circ UF(g)$$
$$\mu_{A'} \circ T(f) = \mu_{A'} \circ T(g)$$

とすると,

$$f = \mu_{A'} \circ \eta_{T(A')} \circ f = \mu_{A'} \circ T(f) \circ \eta_A = \mu_{A'} \circ T(g) \circ \eta_A = \mu_{A'} \circ \eta_{T(A')} \circ g = g$$

が成立するため, $K \circ J$ は忠実である.

また, 任意の $h \in \mathrm{Hom}_{\mathscr{A}_{\mathbf{T}}}((T(A), \mu_A), (T(A'), \mu_{A'}))$ に対し, $h \circ \eta_A\colon A \to T(A')$ を考えると,

$$K \circ J(h \circ \eta_A) = \mu_{A'} \circ T(h \circ \eta_A) = \mu_{A'} \circ T(h) \circ T(\eta_A) = h \circ \mu_A \circ T(\eta_A) = h$$

が成立するため, $K \circ J$ は充満である.

したがって, $K \circ J$ は忠実充満である. □

参考文献

[1] Emily Riehl (著)・「Category Theory in Context」・Dover Publications・2016

[2] Francis Borceux (著)・「Handbook of Categorical Algebra: Volume 2, Categories and Structures 」・Cambridge University Press・1994

[3] Saunders Mac Lane (著)・「Categories for the Working Mathematician」・Springer・1978